第2卷 第12期
1997年12月

中国图象图形学报
Journal of Image and Graphics

Vol. 2, No. 12
Dec. 1997

一类基于实数局部的分形*

黄铁军　柳　健

（华中理工大学图象识别与人工智能研究所，武汉　430074）

摘　要　通过将整数同余的概念推广到实数范围，定义了实数"局部"的概念。即通过某种方式（例如进制分解或连分式分解）将实数表示成无限序列，称无限序列中包含的有限序列为实数的"局部"，具有相同局部的实数称为"同局"。考察实值函数函数值的局部，有如下结论：函数值同局的点组成的集合构成二值分形，构成规则图形是特例；对函数取局部得到新的函数，它的图象是多值分形，构成规则图象则是特例。这种分形复杂性的根源是数的无限性，其规律性的根源是它受到某个指定函数的控制。与传统的分形生成方法不同，文中提出的分形生成方法勿需迭代过程。更进一步，它把"数"和"分形"直接沟通了起来。

关键词　分形，数，局部，同局

1　引　言

从数学本身来说，它研究的最基本的对象是"形"与"数"，因此，"几何图形"所引起的直觉，和由"数"而引起的具体关系与概念，往往是数学中极其丰富的源泉[1]。于是，如何表示数，如何绘制图形，以及数与形的关联与转化，便是数学发展的根本问题[2]。计算机的出现，为从图形的角度研究数字提供了强有力的工具。

分形几何是研究不规则图形的科学，由 Mandelbrot 于 1975 年提出[3]。20 多年来，它已经迅速发展成为一门新兴的数学分支，成为研究和处理自然与工程中不规则图形的强有力的工具，其应用几乎涉及自然科学的各个领域，甚至于社会科学。由于其美丽，也做为一种艺术品流行起来。实际上，分形正起着把现代科学各个领域连结起来的作用。

目前认为，分形最基本的性质是自相似性（Self－similarity），其后提出具有统计自相似的随机分形、自仿射相似（self－affinity）、多分形（multifractals）等概念。从这些性质出发，提出了一系列的分形生成方法。然而，采用这些方法生成的分形，无论是复杂性，还是隐含的规律性，都无一可以与 Mandelbrot 集相比，这说明目前对分形性质的掌握还处于初步阶段。同时，目前分形的定义都是基于集合概念，这样定义的分形可称为黑白分形或二值分形，它仅具有形状复杂性。我们认为，如果分形要概括任意复杂的图形的话，每个点也应该有多种状态的复杂变化，这种分形可称为多值分形。

基于数论，本文提出一种新的分形生成方法。同余理论是数论的核心，是数论所特有的思想、概念和方法。本文将整数同余的概念推广到实数范围。类似于整数的"余数"，定义了实数的"局部"的概念，即通过某种方式（例如进制分解或连分式分解）将实数表示成无限序列，并将无限序列中包含的有限序列称为实数的局部。具有相同局部的实数称为"同局"。在传统数学中，指定一实值函数，一般它对应曲线、曲面或超曲面等规则几何图形，这里，我们考察函数值的局部，并得到如下结论：所有值同局的点组成的集合构成二值分形，构成规则图形是特例；通过对函数取局部得到新的函数，它的图象是多值分形，构成规则图象则是特例。

通过这种方法产生的分形，其根源是数的无限性，例如无理数是无限不循环小数，因而可产生的分

* 本工作得到国防科技预研基金（97J1.5.1JW05）资助
收稿日期：1996-07-16；收到修改稿日期：1996-09-28

形具有无限复杂性。这种无限复杂性不是随机的，因为它在总体上受到某个函数的控制。这种方法把“数”和“分形”之间相互沟通起来，既为从“形”的角度研究“数”提供了一条途径，也为从“数”的角度研究分形提供了可能，或者说从新的角度定义了分形。

本文将首先简单回顾一下到目前为止分形研究的基本情况，并特别注意从数的角度对分形的认识。然后，给出实数局部的概念并由它定义一类分形。最后，将给出采用这种方法生成的分形的例子，并给出其算法。

2 分形的研究

2.1 分形的性质

Mandelbrot 对分形的研究源于与尺度无关的自相似性(Self－similarity)[3]，它也被人们作为分形的一个本质特征。然而，人们越来越发现完全自相似的分形并不生动自然，尽管它比传统的规则图形要复杂。为了给自相似加入更多的复杂性，相对于确定性分形，提出随机分形的概念，或者所谓的统计自相似[3]。也有的引入仿射变换，提出自仿射相似(self-affinity)的概念[3,4]。在将分形应用到实际的图象分析时，为了利用分形维数作为分类参量，提出了多分形(multifractals)的概念[4]。利用上述各种思想，借助于计算机，生成了许多美丽的分形图案，其中 L 系统方法(Lindermayer Systems)和迭代函数系统(IFS, Iterated Function Systems)是分形生成的两种典型的方法。然而，至今为止，人们生成的分形无一可以和 Mandelbrot 集相比，它具有无限的复杂性，然而又是如此有规律。这说明，对分形性质的认识还处于初级阶段。

2.2 分形的定义

在 Mandelbrot 最初的论述中，分形被定义为其 Hausdorff 维数严格大于拓扑维数的集合。由于此定义把一些明显是分形的集排除了，因此其后对分形定义进行了各种修正。实际上，由于上文提到的原因，目前给出一个严格的定义是不可能，也不利于分形几何学发展。通过分形应该具备的性质，K. Falconer 给出了描述性定义[1]，我们认为较为合理，其定义如下：

称集 F 为分形，即认为它具有如下典型的性质：① F 具有精细的结构，即有任意小比例的细节；② F 是如此的不规则以致它的整体和局部都不能用传统的几何语言来描述；③ F 通常有某种自相似的形式，可能是近似的或统计的；④ 一般地，F 的“分形维数”(以某种方式定义)大于它的拓扑维数；⑤ 在大多数令人感兴趣的情形下，F 以非常简单的方法定义，可能由迭代产生。

目前定义的分形是基于集合的，即分形是一个点集：论域中任一点或在集合之中，或者相反，这样定义的分形称为黑白分形。Cantor 集、Koch 曲线、Sierpinski 地毯和海绵、Julia 集、Mandelbrot 集均是如此。尽管为了艺术目的根据逃逸速度指定了不同颜色，但就其本质而言仍是黑白的。我们认为，如果分形要概括任意复杂的图形的话，它就不但要有形状的复杂性，其中的每个点也应该有多种状态的复杂变化，这种分形称为多值分形。

2.3 分形与数

有关文献已注意到从数的角度描述分形[2,5,6]。这里举例说明。

2.3.1 Cantor 三分集

Cantor 三分集通过反复去掉单位线段中间的 1/3 而得到。从数论的角度看，它是 0 到 1 之间，以 3 进制表示且任一位都不为 1 的实数构成的集合

$$F=\{x \mid x=0.r_{-1}r_{-2}r_{-3}\cdots r_j\cdots,\ r_j=0,2,\ j=-1,-2,\cdots\}$$

采用类似方法，可定义 Sierpiñski 地毯为

$$F=\{(x,y)\mid x,y=0.r_{-1}r_{-2}r_{-2}\cdots r_j\cdots,\ r_j=0,2,\ j=-1,-2,\cdots\}$$

Sierpiñski 海绵可类似定义。

2.3.2 Julia 集和 Mandelbrot 集

在复平面上定义迭代函数

$$fu(z): z \leftarrow z^2+u,\ u\in C,\ z\in C$$

则 Julia 集和 Mandelbrot 集为

$$J_u=\{z \mid z\in C, \lim_{n\to\infty} f_u^n(z)\neq\infty\}$$

$$M=\{u \mid u\in C, \lim_{n\to\infty} f_u^n(Zc)\neq\infty, fu(Zc)=0\}$$

2.3.3 复平面上的 Gibert 分形

考虑复数的表示问题。选择一个基 $b\in C$，若 b 不是一个恰当基，则复平面上能被表示的复数组成的集合为分形。

3 数中的分形

3.1 有关定义

定义 1 实数的 q 进制分解 任取大于 1 的正整数 q 为基，则任一实数 a 可唯一分解为：

$a = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \cdots + a_1 q + a_0 + a_{-1} q_{-1} + a_{-2} q^{-2} + \cdots\cdots$

记为

$$a = a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0\, a_{-1} a_{-2} \cdots$$

其中：$a_i (i \in N)$ 称为 a 的第 i 位，

$a_i \in [0, \cdots, q-1]$。

若上述序列为有限的或无限循环的，则 a 为有理数。若为无限不循环序列，则为无理数。

定义 2　实数的连分数分解　$\forall\, a \in R$，a 可表示为如下简单连分数

$$a = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} + \ddots}}}}}$$

简记为$[a_0, a_1, a_2, \cdots a_n, a_{n+1}, \cdots]$。其中 a_0 为整数，$a_n (n > 0)$ 为正整数。式中的 $a_i (i = 0, 1, \cdots)$ 称为 a 的第 i 个不完全商，数$[a_n, a_{n+1}, \cdots]$称为 a 的第 n 个完全商。

有理数被分解为有限序列，若规定其最后一个不完全商大于 1，则表法唯一。无理数被分解为无限序列，且表法唯一。一个实数可展成无限循环序列的充分必要条件是它是某整系数二次方程的无理数根。

定义 3　整数的同余　设 m 为自然数，若整数 a 与 b 之差 $a - b$ 为 m 的倍数，则称 a 与 b 对模 m 同余。记作

$$a \equiv b \pmod{m}$$

特别地，$m = 1$ 时称为平凡剩余，下面若不指明，均指非平凡剩余。

定义 4　完全剩余系与缩系　以 m 为模，全体整数可分为 m 类，同余的都同类，不同类的数不同余，这样的类称为同余类。从每类中取一数为代表构成一个完全剩余系，例如

$$0, 1, 2, \cdots, m-1$$

在与 m 互素的各类中取一代表

$$a_1, a_2, \cdots, a_{\varphi(m)}$$

构成一缩剩余系，简称缩系，此处 $\varphi(m)$ 不超过 m 且与 m 互素的数的个数。

下面将余数的概念推广到实数范围。

定义 5　实数的局部　$\forall\, a \in R$，对 a 进行 q 进制分解，称 a 的第 i 位 a_i 为 a 的第 i 个局部，记为$_q)a(_i$。

定义 6　实数的同局　在 R 上定义局部$_q)a(_i$，$\forall\, a, b \in R$，若

$$_q)a(_i = {_q)b(_i}$$

则称 a，b 关于第 i 个局部同余。记为

$$a \overset{q}{\underset{i}{\equiv}} b$$

局部的概念源于实数的展开。有理数的 q 进制展开为有限的或无限循环的序列，无理数展开为无限不循环小数，这是实数局部无限复杂的根源。上述定义中参数 q 限定局部的取值范围，参数 i 限定局部的位置。局部的概念可推广，例如对 a 进行连分数分解，a 的第 i 个不完全商 a_i 对 q 取余也可作为 a 的第 i 个局部 $_q)a(_i$。

若局部$_q)a(_i$ 的取值范围为 $0 \sim q-1$，类似于从完全剩余系构造缩系，$_q)a(_i$ 的取值范围可进一步缩小。通过类似于这样的映射后，$_q)a(_i$ 的象仍称为局部。局部的取值范围记为 D_L。

3.2　分　形

3.2.1　二值分形

在 R 上定义局部$_q)a(_i$，取值范围记为 D_L。定义实值函数 $f(x)$，x 的定义域为 D，则集合

$$\{x \mid x \in D,\ {_q)f(x)(_i} = k,\ k \in D_L\}$$

在一般情况下构成分形，构成规则图形是特殊情况。

3.2.2　多值分形

函数

$$g(x) = {_q)f(x)(_i} \qquad x \in D$$

的图象一般情况下是多值分形，形成规则图象是特殊情况。这样定义的多值分形的形状复杂性和颜色复杂性是统一的。

这样定义的分形的复杂性源于局部取自无限序列，规律性来自控制函数 $f(x)$。分形变化可通过修改如下 3 个途径来得到：① $f(x)$ 形式的选择；② q 的选择；③ 局部位置 i 的选择。在特殊情况下，上述定义的分形是规则的，例如 $f(z) = |z|$。在有些情况下，在指定 q 后，i 只起放缩作用，或在指定 i 后，q 只起放缩作用。

4　举　例

在下面的例子中(图 1～图 6)，局部 $_m)a(_i$ 都是通过 m 进制分解的方式得到，且 $m = 256$。图象被映射到分辨率为 800×600 的计算机屏幕上，并用不同颜色表示不同的值。

例 1　$f(x, y) = x^2 + y^2$。$-400 \leqslant x \leqslant 400$，$-300 \leqslant y \leqslant 300$，$i = 0$。

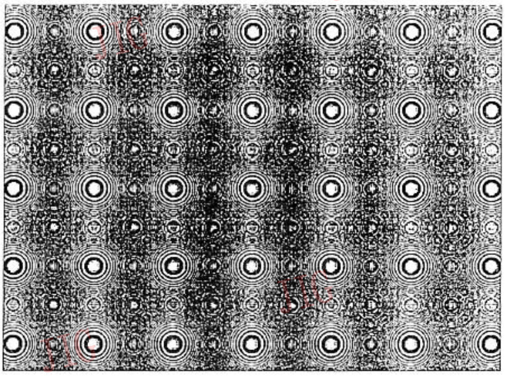

图 1
Fig. 1

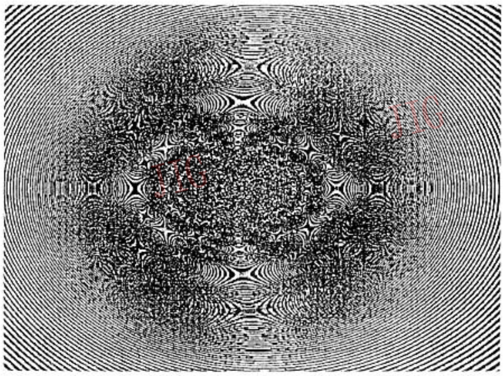

图 4
Fig. 4

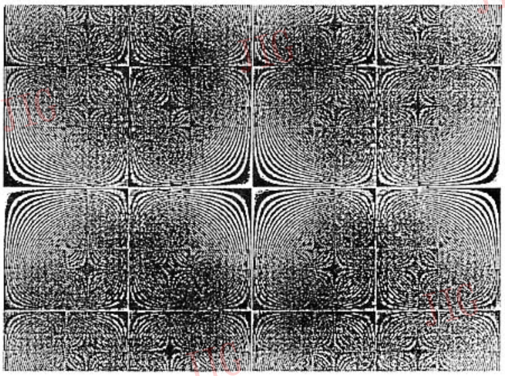

图 2
Fig. 2

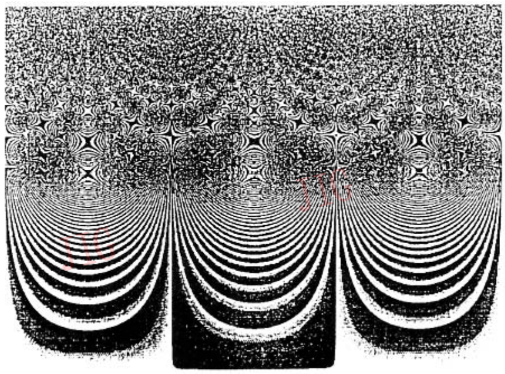

图 5
Fig. 5

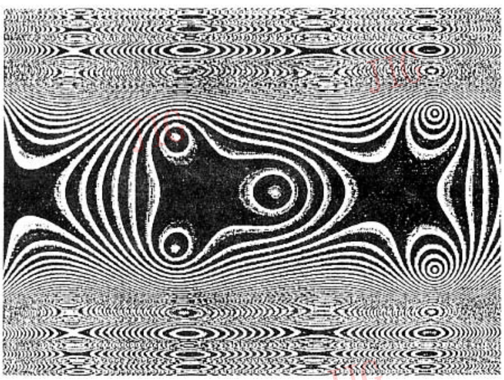

图 3
Fig. 3

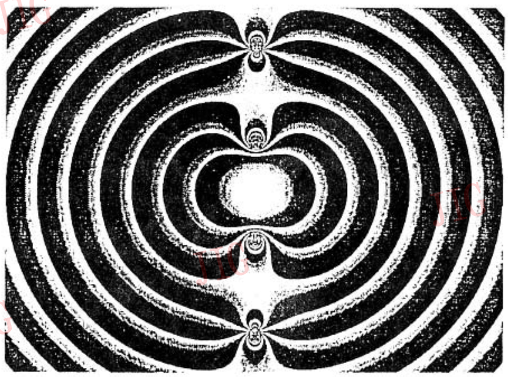

图 6
Fig. 6

例 2　$f(x,y)=xxy$。$-20\leqslant x\leqslant 20$，$-15\leqslant y\leqslant 15$，$i=-1$。

例 3　$f(z)=\cos(z)$，$z\in C$，取 $f(z)-z$ 的模。z 的实部取值范围为 $[-8,8]$，虚部取值范围为 $[-6,6]$，$i=-1$。

例 4　$f(z)=\mathrm{tg}(z)$，$z\in C$，取 $f(z)-z$ 的模。z 的实部取值范围为 $[7.84,7.87]$，虚部取值范围为 $[-0.015,0.015]$，$i=-1$。

例 5　$f(z)=\cos(z)$，$z\in C$，取 $f(z)$ 的虚部。z 的实部取值范围为 $[0,9.435]$，虚部取值范围为 $[-8,0.1]$，$i=-1$。

例 6　$f(z)=\mathrm{tg}h(z)$，$z\in C$，取 $f(z)-z$ 的模。z 的实部取值范围为 $[-8,8]$，虚部取值范围为 $[-6,6]$，$i=-1$。

下面给出实现算法，这里局部定义为 m 进制分解，$(a_i)_m$ 中的 m，i 由用户指定。函数 $f(z)$ 定义在复平面上，自变量实部的取值范围 $[x_{\min},x_{\max}]$ 和虚部的取值范围 $[y_{\min},y_{\max}]$ 也由用户指定。设计算机显示模式的分辨率为 COL × ROW，可表示的颜色数为 G。

算法：

(1) 用户输入 m，i，$x_{\min}$，$x_{\max}$，$y_{\min}$，$y_{\max}$ 令

$$\Delta x=\frac{x_{\max}-x_{\min}}{\mathrm{COL}-1}$$

$$\Delta y=\frac{y_{\max}-y_{\min}}{\mathrm{ROW}-1}$$

$$\Delta g=\frac{G-1}{m-1}$$

$$T=m^{-i}$$

$$x=0,y=0,g=0$$

(2) 对所有点 (col, row)，$col=0,\cdots,\mathrm{COL}-1$，$row=0,\cdots,\mathrm{ROW}-1$，执行如下循环：

①$z=x+yi$，计算 $f(z)$

②$g=[(f(z)\times T)\bmod m]\times\triangle g$

③ 在 (col, row) 处画颜色为 g 的点

④$x\leftarrow x+\triangle x$，$y\leftarrow y+\triangle y$

5　结束语

通过定义实数的局部，我们在数与分形之间架起了一道桥梁。利用分形描述了数的局部的分布规律，反过来，利用数定义了一类分形。与传统的黑白分形不同，这里定义的分形为多值分形，它不仅具有形状的复杂性，分形上的每一点也有多种状态，二者统一起来形成分形。

本文的分形生成方法是非迭代方法。由于认为自相似性是分形的本质特征，已有的分形生成方法大都以迭代作为基本过程。因而从本文得到的另一结论是，分形不一定非要通过迭代的方式产生，其产生方式可以多种多样。这也就是说，分形作为一种几何图形，具有更一般性的意义。

数学从根本上看是研究“形”和“数”的，数的无限性和分形的无限性，以及函数的规律性与分形的相似性之间的联系使我们想到，从某种意义上看，数就是分形，分形就是数。我们认为，有关数的研究可加深对分形性质的认识，而通过对分形的研究，可以更直观的探索数的规律。关于数与分形的相互关系，本文进行了初步探讨，进一步的后续研究将会给出更一般的规律。

参 考 文 献

1　华罗庚. 数论导引. 北京：科学出版社，1957

2　齐东旭. 分形及其计算机生成. 北京：科学出版社，1994

3　Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature, Freeman, San Francisco, 1983

4　Crilly A J, Earnshaw R A, Jones H. Application of fractals and chaos: the shape of things, Springer－Verlag, 1993

5　Kenneth Falconer, Fractal Geometry—Mathematical Foundations and Applications(中译本：曾文曲等译，东北大学出版社，1991)

6　Gibert W I. Fractal Geometry Derived from Complex Bases. Mathematical Intelligencer, 1982, 4(2)

黄铁军，现为华中理工大学图象所博士研究生。1992 年～1995 年在武汉工业大学计算机系从事手写印刷体汉字识别研究，获得硕士学位。目前的研究方向为虚拟现实技术，涉及立体视觉、VRML、图象处理和识别、分形和复杂系统等领域。

（下转 900 页）

高翔，1996 年获清华大学电子工程系学士学位，现在清华大学电子工程系攻读硕士学位。主要进行文本图象的自动区域分割及版面理解方面的工作。

Boundary-Based Non-Manhattan Document Image Autozoning

Gao Xiang, Zhang Li, Wu Guowei

(*Electronic Engineering, Tsinghua Univ, Beijing* 100084)

Abstract Today, more and more printed documents use non-Manhattan format. The traditional autozoning methods don't adapt to the format properly. A new autozoning method based on boundary code is presented in this paper and implemented for document image of non-Manhattan format.

Keywords Document image, Autozoning, Manhattan format

(上接 873 页)

A Kind of Fractals Based on Part of Real Number

Huang Tiejun, Liu Jian

(*Image Recognition and Artifical Intelligence Institute,*
HuangZhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

Abstract By extending the concept congruence from integer to real number field, this paper defines a concept named 'part' of real number. A real number can be represented as an infinite sequence, a finite sequence of it is called 'part'. If two real numbers have the same part, then they are called isopart. By Studying the part of a real value function, we have the conclusion as following: the set which includes all the isopart points is normally a binary fractals, The image of the new function generated by taking the part of the given function is multi-value fractals. The infinity of real number leads to the complexity of this kind of fractals, and the given function leads to the regularity. The method does not need iterative operations which are essential for traditional fractal generation methods. In addition, it makes the connection between numbers and fractals.

Keywords Fractals, Number, Part, Isopart